**The 8000th Busy Beaver number:**

פְּרֶה מאמר:  
בפוסטים מוקדמים תיאר ד"ר סקוט את מדעי המחשב התיאורטיים כ"אפיסטמולוגיה (תורת ההכרה, גבולות הידיעה) כמותית".  
בניית מכונות טיורינג קטנות שהתנהגותן חומקת מתורת הקבוצות איננה מדעי המחשב התיאורטיים המקובלים בשום דמיון.   
זה קרוב יותר בפועל לשפות תכנות או לארכיטקטורת מחשבים, או אפילו לתרגול פנאי המכונה code-golfing. כאן נבחן פרויקט אחר שעסק בצורה מאוד ברורה ומפורשת בהצבת הגבול הכמותי בין הנודע אל הלא נודע.

מאמרם של סקוט ארונסון ואדם ידידיה עוסק ב"התחמקותו" של המספר ה-8000 בבעיית הבונה העסוק מ[תאוריית ZF של תורת הקבוצות](#zermelo_frankel_set_theory).  
ננסה להבין קודם כל את התאוריה ומשם נבין איך (ולמה דווקא) המספר ה8000 בבעיה שלנו מתחמק מקיומה.  
  
בתחילת המאמר, סקוט מביע את הערכתו הרבה לפרויקט מוצלח של אדם ידידיה, סטודנט לדוקטורט בMIT שהצליח לבנות מכונת טיורינג בעלת בעלת סרט אחד ושני תווים בעלת לא פחות מ-7918 מצבים, שהתנהגותה בהרצה על סרט ריק, לא ניתנת להוכחה מהאקסיומות הקלאסיות של תורת הקבוצות.

הצהרה מדויקת לתוצאה העיקרית היא,  
יש לנו מכונת טיורינג בעלת 7918 מצבים בשם Z, כך ש:  
1. Z פועלת תמידית, בהנחה שישנה עקביות של התאוריה הקרדינלית SRP.

2. לא ניתן להוכיח שZ רצה לעולם ב[ZFC](#ZFC), בהנחה שתאוריה זו עקבית.

**רקע:**  
כתוצאה מיידית [מתאוריית אי השלמות של גֶדֶל](#תאוריית_אי_השלמות_של_גֶדֶל), נובע שישנה תכנית מחשב כלשהיא באורך מסוים, ה"חומקת" מכוחה של המתמטיקה הרגילה להוכיח מה היא עושה, כאשר היא רצה עם כמות זיכרון בלתי מוגבלת.  
לדוגמא, תכנית כזו יכלה למנות את כל ההשלכות האפשריות של אקסיומות ZFC זו אחר זו ולעצור אם תמצא סתירה כלשהיא.  
בהנחה שZFC עקבית, התכנית אמורה לרוץ לנצח, אך מצד שני ZFC **לא יכולה להוכיח** שהתכנית רצה לנצח, כי אם היא הייתה עושה זאת, היא הייתה מוכיחה את העקביות **שלה**, ומפרה בכך את משפט אי השלמות השני.  
  
לצערנו, דיון זה משאיר אותנו בחשיכה לגבי המקום בחלל תוכניות המחשב בו   
"הגרמלין הגֶדֶלי" מרים את ראשו הבלתי ניתן להכרעה.  
תכנית שתחפש אי עקביות כלשהיא בZFC לבטח תהיה יצור די מסובך.. נסביר מדוע.  
יהיה עליה לקודד לא רק את סכמת האקסיומה של ZFC, אלא בנוסף גם את השפה וכללי הסקה מהמעלה הראשונה..  
בשפת תכנות קלאסית (c, java ..), תכנית בסגנון זה עשויה להיות בעלת אלפי שורות/הוראות אם מדובר בשפת מכונה אלמנטרית.  
כנראה מעולם לא נתקלנו ולא ניתקל בתכנית כזו, גם אם היה לנו מחשב מוטרף בגודלו של היקום והיינו מריצים תכנית אחר תכנית ברנדומליות שיטתית של עכבר מעבדה.

מכאן, השאלה החשובה במקומה עומדת, שאלה שבודדים שאלו עד כה בהיסטוריה:  
האם האקסיומות של תורת הקבוצות מספיקות בכדי לנתח לנתח את ההתנהגות של כל תוכנית מחשב שאורכה לכל היותר, נניח, 50 הוראות מכונה? או שיש תוכניות סופר קצרות *שכבר מציגות "התנהגות גֶדֶלית"*?

מדעני המחשב התיאורטיים עשויים להתנגד לכך שזו "רק שאלה של קבועים".   
ובכן בסדר, כן, אבל גם מקור החיים ביקום שלנו - פאזל לא לגמרי לא קשור לנושא אך בהחלט מהותי - הוא גם "רק שאלה של קבועים"!  
ביתר פירוט, אנו יודעים שאפשר בחוקי הפיזיקה הנוכחיים שלנו לבנות מכונה המשכפלת את עצמה: לדוגמא, DNA או RNA והאביזרים הנלווים להם.  
אנו גם יודעים שמולקולות זעירות כמו H2O ו- CO2 אינן משכפלות את עצמן,  
אבל אנחנו לא יודעים **כמה קטנה** יכולה להיות המולקולה הקטנה ביותר המשכפלת את עצמה - וזה נושא שמשפיע אם עלינו לצפות *למציאת חיים כלשהם ביקום אי פעם* או שהתכבדנו להיות רק אנחנו לבד.

מה אומרים בעצם חוקי הפיזיקה או בכלל, חוקי הטבע?

מדעי הטבע הם מעשה ידי אדם, נועדו בשביל לנסות להבין את דפוסי ההתנהגות בעולמנו.

לכן, יש פיתוח מודלים בהם אנחנו לא מגלים חוקים, אלא מנסחים אותם.

נקודת ההתחלה של כל חוק מתחילה בהנחת יסוד שלא תמיד (לפעמים בהכרח) לא תואמת את המציאות, לדוגמא:

העיקרון הקוסמולוגי - קובע כי היקום כולו איזוטרופי (אין בו כיוון ייחודי ולכן יש בו סימטריה) והומוגני, אחיד בכל מקום ברמת הגלקסיות.

אך כיום ידוע שהיקום לא הומוגני כלל ועיקר, אלא כל גלקסיה עומדת בפני עצמה במרחקים עצומים זו מזו ללא אחידות כלשהיא.

אז איך בוחרים מודלים?

מצד אחד אם נהיה נאמנים מדיי למציאות - המודל יהיה מסובך ולא נצליח לבנות עליו כלום, כי לעולם לא נבין את היקום לאשורו (על המוח האנושי אנחנו יודעים מעט מאוד ומדענים תמימי דעים שחלקים נרחבים ממנו היו ויישארו בגדר חידה).

מצד שני, אם המודל יהיה פשטני , הוא לא ישקף את מה שקורה מסביבנו בצורה ראויה וטווח הטעות יהיה גדול מאוד.

**עקומת מאמץ מַעֲוָות** מתייחסת לחומר שלא קיים בטבע, ובאה להראות לנו איך לכל חומר יש גרף שונה שמייצג את הקשר בין המאמץ, הכוח שהופעל עליו, לבין השינוי שיתבצע בו.

יש חומרים שאחרי שהופעל עליהם כוח יחזרו למצב גיאומטרי זהה, כמו קפיץ

לעומת זאת, חרסינה שנפעיל עליה כוח דומה, תוכל להגיע לנקודת כניעה ומשם לנקודת שבר, אַל חָזור.

בחזרה לשאלה שלנו,  
ישנם אנשים מסוימים העשויים להתנגד לכך שמה שאנחנו שואלים עליו כבר נחקר,   
במהלך חצי המאה של המאה לעצב את מכונת טיורינג האוניברסלית הקטנה ביותר   
(היה זה נושא הפרס של סטיבן וולפרם בסך 25,000 דולר בשנת 2007).   
אבל אני רואה את זה כשונה במהותו, מהסיבה הבאה.   
למכונת טיורינג אוניברסלית - כלומר מכונה המדמה כל מכונה אחרת שמתוארת לה על קלטת הקלט שלה (לדוגמא, מכונת-טיורינג אוניברסלית U, מסוגלת "לסמלץ" חישוב של כל מ"ט M על קלט x) - יש את הפריבילגיה לפרוק כמעט את כל המורכבות שלה לפורמט התיאור של מכונת הקלט. אז כן, זה בדיוק מה שכל [המכונות האוניברסליות הזעירות](#המכונות_האוניברסליות_הזעירות) הידועות עושות! אבל לתוכנית שבודקת (נניח) את [ההשערה של גולדבאך](#השערת_גולדבאך), או את [השערת רימן](#השערת_רימן), או את העקביות של תורת הקבוצות, על סרט ריק בתחילה, אין חירות כזו.   
עבור מכונות כאלה, מספר מצבים באמת עושה רושם של מדד מהותי לסיבוכיות,   
משום שהסיבוכיות הזו לא יכולה "להינעץ" בשום מקום אחר.  
אפשר לנסח את השאלה שלנו על בסיס פונקציית "הבונה העסוק" הידועה לשמצה.  
נניח ש BB(n) כלומר המספר הn-י של הבונה העסוק, מוגדר להיות מספר הצעדים המקסימלי שכל מכונת טיורינג בעלת n מצבים צועדת בריצה התחלתית על סרט ריק ובהנחה שהיא תיעצר לבסוף.  
מובן לנו ש BB(n) גדל מהר יותר מכל רצף של מספרים שלמים הניתנים לחישוב.  
איך אנחנו כל כך בטוחים בזה?  
כי אחרת, אם קצב הגדילה היה קטן/שווה, אפשר היה להשתמש בעובדה זו כדי לפתור את [בעיית העצירה](#בעיית_העצירה), בסתירה לתֵאוֹרֵמָה (הנחה הטעונה הוכחה) של טיורינג.  
  
דבר מדהים נוסף בפונקציית הBB , הוא שמדובר בפונקציה שלמה (כל פונקציה בוליאנית בינארית יכולה לבוא לידי ביטוי במונחים שלה) מוגדרת היטב, ועם זאת ברגע ש"נתקן" את האקסיומות של המתמטיקה, ניתן יהיה להוכיח אי פעם רק ערכים סופיים של הפונקציה, אפילו באופן עקרוני.  
למה?  
ניקח שוב מכונת טיורינג M שתעצור אם ורק אם יש סתירה בתורת הקבוצות של ZF.  
ברור שניתן לבנות מכונה כזו עם מספר סופי של k מצבים, אך לא נוכל לחשב את הערך של BB(k) כי ZF לא תוכל לקבוע את ערכם של BB(k) (ומכאן גם BB(k+1)/BB(k+2)..) אלא כן ZF לא עקבית! בשביל זה, ZF צריכה להוכיח שM רצה לעד וכך להוכיח את העקביות שלה וכך להיות לא עקבית במשפט גֶדֶל.  
  
הגענו למצב בו נוכל לשאול שאלה פרקטית, כמותית:  
כמה ערכי פונקציית BB ניתן לדעת?  
מהי הנקודה בה הפונקציה נוטשת את תחום בני האנוש ומגיעה לעולמות עליונים?   
האם זה קרוב יותר לn=10 או בכלל לn=10,000,000?  
בפועל, נקבעו ארבעה ערכים של BB עד כה סה"כ.  
  
  
  
BB(1)=1

BB(2)=6

BB(3)=21 – לין וראדו, 1965.

BB(4)=107 (Brady 1975) – בריידי, 1975.  
  
אנו יודעים גם כמה חסמים תחתונים למספרים גבוהים יותר:  
BB(5) ≥ 47,176,870 (Marxen and Buntrock 1990)

BB(6) ≥ 7.4 × 1036,534 (Kropitz 2010)  
BB(7)>10^10^10^10^10^7.

הפסימיים מבין חובבי בעיית הBB סוברים כי BB(6) לא יהיה ידוע לעולם.  
מצד שני, הטיעון המופשט שהבאנו קודם, אומר שאם נסתפק בתורת הקבוצות של ZF, יכולים להיות עשרות מיליוני k אופציונליים, כך שכל ערכי BB(K+i) לעולם לא ניתן יהיה להוכיח. אז השאלה שלנו חוזרת: האם מספר הערכים הידועים של פונקציית BB ישאף לכמה בודדים, או יתקרב למיליון?  
  
זו השאלה בהם עסקו אדם ידידיה וד"ר סקוט ארונסון.  
אין סיכוי לתכנן מכונת טיורינג בצורה ידנית לכל המשימות הללו, כך שבתור התחלה,  
יצר אדם שפת תכנות חדשה בשם לקוניק, המיועדת לכתיבת תוכניות שמתאגדות לשפת מתווך בשם TMD ומשם לכדי מכונות טיורינג קטנות.  
  
גם לאחר כל זה, אנו מעריכים כי ניסיון ישיר לכתוב תוכנית "לקונית" שתחפש סתירה ב- ZFC יוביל למכונת טיורינג עם מיליוני מצבים.   
לכן נציג שלושה רעיונות הדרושים בכדי להוריד את כמות המצבים למספר סביר.  
  
הראשון היה להיעזר בעבודתו של הארווי פרידמן, שכתב על הבעיות האלה בעבר.  
פרידמן עמל מאז שנות השישים למצוא הצהרות אריתמטיות "טבעיות", שאינן תלויות באופן עצמאי ב- ZFC או בתיאוריות קבועות אחרות.  
הצהרותיו - הכרוכות בדרך כלל באובייקטים המכונים "גרפים בעלי סדר-משתנה" – נראות זרות ומרוחקות מקו המחשבה הסביר.  
אך כך או כך, הצהרותיו של פרידמן עדיין נראות הרבה יותר קלות לקידוד כתוכנות מחשב קצרות מאשר המנגנון המלא של הלוגיקה ותורת הקבוצות מהסדר הראשון!  
  
הרעיון השני היה משהו שקראנו לו "עיבוד בסרט".  
בעיקרון, במקום לקמפל ישירות מ- Laconic מטה עד למכונת טיורינג,  
אדם כתב מתורגמן ([interpreter](#interpreter)) במכונת טיורינג (שלקחה כ -4000 מצבים - עלות קבועה יחידה), ואז מכונת טיורינג הסופית כתבה תחילה תוכנית ברמה גבוהה יותר לסרט שלה ופירשה אותו לאחר מכן. במקום שתהליך ההידור מייצר תְּקוּרָה עצומה במספר מצבי מכונות טיורינג (ומכונה חוזרת), גישה זו נותנת לנו תקורה נוספת בלבד.   
נמצא שרעיון זה הפחית את מספר המצבים לאין שיעור.  
  
הרעיון השלישי הוצע לראשונה בשנת 2002 ואנו קוראים לזה "קידוד אינטרוספקטיבי (מביט פנימה)". כאשר אנו כותבים את התוכנית שתתפרש על קלטת מכונת טיורינג, הגישה הנאיבית תשתמש במצב מכונת טיורינג אחד לכל ביט. אבל זה לחלוטין בזבזני, מכיוון שבמכונת טיורינג בעלת n מצבים, כל מצב מכיל log (n) ביטים של מידע (בגלל המצבים האחרים שהוא צריך להצביע עליהם).   
גישה טובה יותר מזו מנסה לנצל כמה שיותר מאותם ביטים.  
פעולה זו מקנה לנו חיסכון נוסף של עד פי 5 במספר המצבים.

עבור השערות גולדבאך ורימן, "שילמנו" את אותה תקורה של 4000 מצבים עבור המתורגמן, אבל אז התוכנית שצריך היה לפרש הייתה פשוטה יותר, ונתנה מכונה כוללת קטנה יותר. אגב, לא ברור באופן אינטואיטיבי שהשערת רימן מקבילה לאמירה שתוכנית מחשב מסוימת פועלת לנצח, אך היא נובעת מעבודות קודמות.

כדי להקדים את השאלה הבלתי נמנעת,   
כן, הרי שהפעלנו את מכונות הטיורינג האלה לזמן מה, ולא, אף אחת מהן לא נעצרה אחרי יום בערך. אבל לפני שנפרש את זה כראיה לטובת גולדבאך, רימן והעקביות של ZFC,   
אתה כנראה צריך לדעת שמכונת טיורינג הבודקת אם כל הריבועים המושלמים הם פחות מ -5, המיוצרת באמצעות Laconic, צריכה לרוץ יותר מ- שעה(!) לפני שמצא את הדוגמה הנגדית הראשונה (כלומר 3^2=9) ונעצרת.   
מכונות טיורינג ע"י Laconic מותאמות רק למספר המצבים, לא למהירות ריצה, בלשון המעטה.

כמובן, עדיין נותרו שלושה סדרי גודל בין הערך הגדול ביותר של n (4) שעבורו BB (n) ידוע במתמטיקה מבוססת ZFC, לבין הערך הקטן ביותר של n (7,918) שעבורו ידוע כי BB (n) אינו ניתן לחישוב. יש אופטימיות לשיפורים נוספים במכונה Z - בין אם זה אומר הפשטה של הצהרת פרידמן, מתורגמן שעוצב מחדש (אולי באמצעות חישוב lambda?),   
או "מודל רקטות רב שלבי" שבו מתורגמן חשוף ופשוט מאוד, יפרק מתורגמן שני עשיר יותר, שישמש לפירוק שלישי וכו', עד שתגיע לתוכנית שאכפת לך ממנה.   
זה יהיה לא פחות מהלם אם מישהו בעשרות שנים הקרובות יקבע את הערך של BB(10) למשל, או יוכיח את הערך הבלתי תלוי בתורת הקבוצות.  
גם לאחר שהסינגולריות מתרחשת, סביר להניח שהקביעה של BB(10) תישאר די מאתגרת.

מושגים:

Zermelo-Frankel Set Theory  
תאוריה מתמטית בעלת 8 אקסיומות, שנועדה לפרמל מושג פרימיטיבי אחד,   
של קבוצה סופית שהאלמנטים בה סופיים והיא well-founded (מורכבת ממספר סופי של קבוצות מקוננות בלבד), כך שכל הישויות ביקום זה הן קבוצות כאלה.  
תורה זו הביאה לקיומו של יקום תיאורטי-קבוצתי כה עשיר עד שניתן לפרש את **כל** האובייקטים המתמטיים כסטים.  
היא משמשת **כבסיס** לכל המתמטיקה בזכות האקסיומות שלה.

ZFC  
הרחבה לZF יחד האקסיומה התשיעית של הבחירה ( C מייצג "בחירה", choice), והיא אומרת שלכל משפחה לא ריקה של קבוצות, יש את פונקציית הבחירה שמחזירה פריט רנדומלי מהקבוצה.

האם ZFC עקבית?  
שאלה ענקית. אנחנו **מאמינים** שכן, אך **לא** **נוכל** **להוכיח** זאת לעולם הודות לתאוריית אי השלמות של גֶדֶל. אפשר לטעון שלא מצאנו סתירה, אך מצד שני בדקנו 0% מהמקרים כי יש אינסוף מקרים בZFC. אז מה מניח את דעתנו בהקשר לאמונה הכמעט עיוורת הזו?  
  
התשובה לכך גובלת בפילוסופיה.  
נדמה את השאלה הזו להימצאותם של חדי קרן ורודים בעולם אינסופי.  
האם כל יום שעובר בו איננו מוצאים כאלה ביקום חסר הגבולות שלנו, הוא לא סוג של הוכחה לאי קיומם?

בואו נעשה את זה רשמי יותר.

בעוד שבמובן מסוים האקסיומות המתמטיות (והתיאוריות הנובעות מהן) אינן מוגבלות,   
איננו בוחרים מהן באופן אקראי בבחירת מה ללמוד.   
ZFC קמה מהאינטואיציה שלנו לגבי קבוצות שנבעו מעבודה עם קבוצות ומספרים במשך אלפי שנים. אז המערכות שאנו בוחרים לעבוד איתן במובן לא טכני כלשהן "פחות סבירות" להיות לא עקביות מאשר אם רק יצרנו את האקראי שלהם באופן אקראי.

כמו כן, אנו נוטים לגלות חוסר עקביות די מהר ברגע שנתחיל בניתוח רשמי של מערכות. לדוגמא, הפרדוקס של ראסל נמצא עוד לפני שגוטלוב פרגה סיים להוציא את ספרו.

גם אם ZFC אינו עקבי בצורה עדינה כלשהי, זה היה כל כך מוצלח כל כך הרבה זמן עד שכנראה ניתן למצוא מערכת עקבית דומה ללא יותר מדי אובדן כוח.

לבסוף, תיאורטיקנים של תורת הקבוצות השקיעו עשרות שנים בחקר תיאוריות חזקות עוד יותר שלא נמצאו כלא עקביות. אם הייתה חוסר עקביות ב- ZFC, סביר להניח שהוא יעלה מוקדם יותר ברגע שתתחיל להוסיף אקסיומות חזקות נוספות כמו עוצמות גדולות יותר.

לבסוף, **זו** רק הסיבה לכך שתאורטיקנים מאמינים ש- ZFC עקבי. עבור המתמטיקאי הממוצע, שאלת השאלה הזו היא כמו לשאול "מדוע אתה מאמין שישנו יקום עקבי ואובייקטיבי, ולא כזה שנוצר לפני אלפית השנייה בצורה זו בדיוק וכל חוקי הפיזיקה פשוט יפסיקו לפעול מחר?" פילוסופיה לחוד, התגובה של רוב האנשים מסתכמת ב"כיוון שהיא פשוטה ושימושית יותר לחיי אם אני לא דואג ברצינות לאפשרות הזו, וגם אם היא הייתה נכונה, היסודות הפילוסופיים של העולם שלי הם פחות הדאגות שלי.."

מכונות אוניברסליות זעירות:  
כשאלן טיורינג העלה את הרעיון של מכונה אוניברסלית, הוא חשב על מודל המחשוב הפשוט ביותר שיהיה חזק דיו בכדי לחשב את כל הפונקציות האפשריות שניתנות לחישוב.  
היה זה קלוד שאנון שבשנת 1956 העלה לראשונה באופן מפורש את שאלת מציאת מכונת טיורינג האוניברסלית הקטנה ביותר האפשרית.  
הוא הראה ששני תווים (בד"כ 0 ו-1) מספיקים כל עוד משתמשים במצבים מספיקים   
(או להפך), ותמיד ניתן להחליף מצבים בתווים הללו.  
 הוא גם הראה שאף לא מכונת טיורינג אוניברסלית אחת של מצב בודד יכולה להתקיים.

בעיית העצירה:

מהמרכזיות בבעיות בתחום החישוביות.  
מנוסחת כבעיית ההכרעה (כן/לא) כדלקמן:  
בהינתן תוכנית מחשב וקלט, האם התוכנית תסיים את פעולתה בשלב כלשהו עבור קלט זה?  
  
תאוריית אי השלמות של גֶדֶל  
לפי משפט השלמות של גודל, אם ZF עקבי, אז הוא מספק, ולכן יש קבוצה V אוספת את כל המערכות ביקום של ZF, שנראית סתירה.  
  
interpreter

השערת גולדבאך

השערת רימן